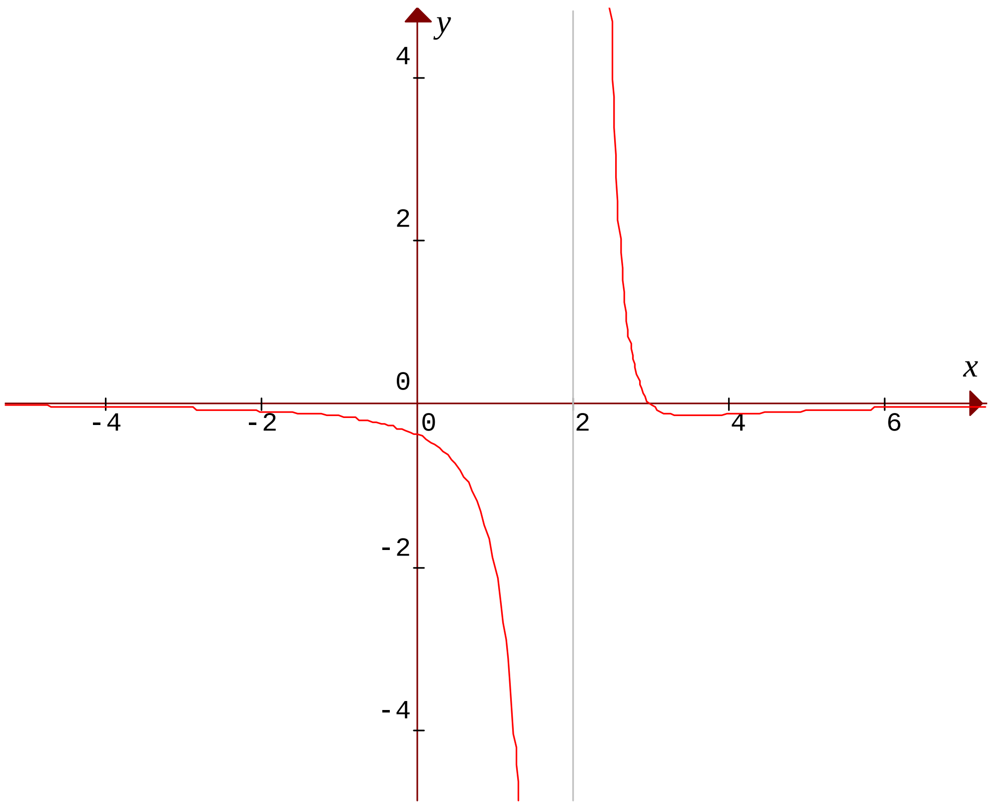
STUDIO DI FUNZIONE: razionale frazionaria

$y = f(x)$	$y = \dfrac{3-x}{(x-2)^3}$
Campo di Esistenza	$\mathrm{CDE} = \{\forall x \in (-\infty,+2) \cup (+2,+\infty)\}$
Eventuali intersezioni con gli assi coordinati	intersezione con l'asse x : $(3,0)$ intersezione con l'asse y : $\left(0,-\dfrac{3}{8}\right)$
segno della funzione	la funzione è positiva in : $2 < x < 3$
comportamento agli estremi del dominio	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-x}{(x-2)^3} = 0^-$; $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3-x}{(x-2)^3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3-x}{(x-2)^3} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-x}{(x-2)^3} = 0^-$
eventuali asintoti	asintoti verticali: $x = 2$ asintoti orizzontali: $y = 0$ asintoti obliqui: nessuno
derivate	$y' = \dfrac{2x-7}{(x-2)^4}$; $y'' = \dfrac{6(4-x)}{(x-2)^5}$
monotonia	la funzione è decrescente : $x < \dfrac{7}{2}$ la funzione è crescente : $x > \dfrac{7}{2}$
eventuali massimi e minimi relativi	minimo : $\left(\dfrac{7}{2},-\dfrac{4}{27}\right)$ massimo : nessuno
concavità e convessità	la funzione presenta la concavità verso l'alto in : $2 < x < 4$ la funzione presenta la concavità verso il basso in : $x < 2$, $x > 4$
eventuali punti di flesso	punto di flesso ascendente : $\left(4,-\dfrac{1}{8}\right)$
grafico	

STUDIO DI FUNZIONE: razionale frazionaria

$$y=\frac{3-x}{(x-2)^3}$$

Campo di Esistenza

$y=\frac{3-x}{(x-2)^3}$ è una funzione razionale fratta, perciò basterà imporre che il denominatore non sia nullo:

$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$.

Questo si verifica sempre nel campo dei numeri Reali, quindi il CDE della funzione è costituito dall'unione degli intervalli:

$\text{CDE}=\{\forall x\in(-\infty,+2)\cup(+2,+\infty)\}$.

Intersezioni con gli assi coordinati

Intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y=\frac{3-x}{(x-2)^3} \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} \frac{3-x}{(x-2)^3}=0 \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} 3-x=0 \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

il punto in cui la curva interseca l'asse x è: $(3,0)$

Intersezione con l'asse y:

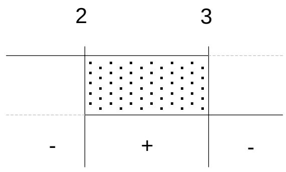
$$\begin{cases} y=\frac{3-x}{(x-2)^3} \\ x=0 \end{cases},\quad \begin{cases} y=\frac{3}{(0-2)^3} \\ x=0 \end{cases},\quad \begin{cases} y=\frac{3}{-8} \\ x=0 \end{cases},\quad \begin{cases} y=-\frac{3}{8} \\ x=0 \end{cases}$$

Il punto in cui la curva interseca l'asse y è : $\left(0,-\frac{3}{8}\right)$

Segno della funzione

Studiamo in quali intervalli la funzione è positiva, ovvero in quali regioni del CDE la funzione si dispone sopra l'asse delle ascisse:

$$\frac{3-x}{(x-2)^3}>0\ ,\quad \begin{matrix} \text{N}>0 & 3-x>0 & -x>-3 & x<3 \\ \text{D}>0 & (x-2)^3>0 & x-2>0 & x>2 \end{matrix}$$



La funzione risulta positiva per valori $2<x<3$.

Studio coi limiti del comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x}{(x-2)^3}=\frac{\infty}{\infty}\ ,$$

Il limite si risolve confrontando gli ordini di infinito del numeratore e del denominatore. Al numeratore compare un binomio di 1° grado, mentre al denominatore un polinomio di 3° grado. L'ordine di infinito del denominatore è più alto, quindi tende ad infinito più rapidamente: la frazione tende dunque a 0.

La funzione, quando x tende a $-\infty$, tende al valore 0^-.

In altro modo, la forma di indeterminazione si elimina raccogliendo al numeratore e al denominatore la stessa quantità; si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x}{(x-2)^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x}{x^3-6x^2+12x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{3}{x}-1\right)}{x\left(x^2-6x+12-\frac{8}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{+\infty}=0^-,$$

semplificando per x, sostituendo $-\infty$ al posto della variabile e notando che il $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$ e $\lim_{x\to-\infty}-\frac{8}{x}=0$, si ottiene infine:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x}{(x-2)^3}=0^-.$$

In modo analogo si procede per l'altro limite e si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{(x-2)^3}=0^-.$$

Quindi la curva ha come asintoto orizzontale la retta di equazione $y=0$

Calcoliamo ora gli altri limiti:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3-x}{(x-2)^3}=\frac{3-2^-}{\left(2^- -2\right)^3}=\frac{1}{\left(0^-\right)^3}=\frac{1}{0^-}=-\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3-x}{(x-2)^3}=\frac{3-2^+}{\left(2^+ -2\right)^3}=\frac{1}{\left(0^+\right)^3}=\frac{1}{0^+}=+\infty\ .$$

Asintoti verticali

Dall'esame del CDE e dal calcolo dei limiti che tendono ad ∞:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3-x}{(x-2)^3}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{3-x}{(x-2)^3}=+\infty$$

si deduce che la funzione possiede un asintoto verticale di equazione $x=2$.

Asintoti orizzontali

Dal calcolo del limite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x}{(x-2)^3}=0$ si deduce che la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale per la curva.

Calcolo delle derivate

$$y'=\frac{-1(x-2)^3-(3-x)3(x-2)^2}{(x-2)^6}=-\frac{(x-2)^2(x-2+9-3x)}{(x-2)^6}=-\frac{7-2x}{(x-2)^4}=\frac{2x-7}{(x-2)^4}\ ;$$

$$y''=\frac{2(x-2)^4-(2x-7)4\,(x-2)^3}{(x-2)^8}=\frac{2(x-2)^3\,(x-2-4x-14)}{(x-2)^8}=\frac{2(-3x+12)}{(x-2)^5}=\frac{6(4-x)}{(x-2)^5}$$

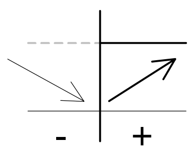
Ricerca di eventuali punti di massimo o minimo relativi

$$y'=0\quad\Rightarrow\quad\frac{2x-7}{(x-2)^4}=0\ ,\quad 2x-7=0,\quad x=\frac{7}{2}\ .$$

In tale punto esiste un probabile massimo o minimo.
Per saperne di più studiamo la monotonia della funzione.

Studio della monotonia

$$y'>0\quad\Rightarrow\quad\frac{2x-7}{(x-2)^4}>0\qquad \begin{array}{llll} \mathrm{N}>0 & 2x-7>0 & 2x>7 & x>\frac{7}{2}\\ \mathrm{D}>0 & (x-2)^4>0 & & \text{sempre vero}\end{array}$$



quindi la curva risulta decrescente per valori $x<\frac{7}{2}$, e crescente per valori $x>\frac{7}{2}$.

Questo conferma che esiste un punto di minimo relativo per la funzione.
Calcoliamo allora l'ordinata di tale punto sostituendo il valore dell'ascissa nell'equazione:

$$y=\frac{3-\frac{7}{2}}{\left(\frac{7}{2}-2\right)^3}=\frac{\frac{6-7}{2}}{\left(\frac{7-4}{2}\right)^3}=\frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{27}=-\frac{4}{27}\ .$$

La funzione presenta un punto di minimo relativo di coordinate $\left(\frac{7}{2},-\frac{4}{27}\right)$

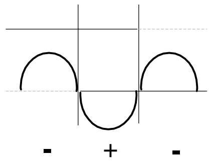
Ricerca di eventuali punti di flesso

$$y''=0\quad\Rightarrow\quad\frac{6(4-x)}{(x-2)^5}=0\quad ,\quad 4-x=0\quad ,\quad x=4\ .$$

L'ascissa del probabile punto di flesso è $x=4$.

Studio della concavità

$$y''>0\quad\Rightarrow\quad\frac{6(4-x)}{(x-2)^5}>0\qquad \begin{array}{llll} \mathrm{N}>0 & 4-x>0 & -x>-4\ , & x<4\\ \mathrm{D}>0 & (x-2)^5>0 & x-2>0 & x>2\end{array}$$



La curva quindi presenta la concavità verso l'alto in : $2<x<4$,
mentre presenta la concavità verso il basso in : $x<2$, $x>4$.
Il punto di ascissa +2 che non appartiene al CDE della funzione, non è da considerarsi un flesso, anche se la curva ivi cambia la sua concavità.

Calcoliamo ora le ordinate del punto di flesso sostituendo il valore ottenuto nella funzione:

$$y = \frac{3-4}{(4-2)^3} = \frac{-1}{(2)^3} = -\frac{1}{8}.$$

Per cui il punto di coordinate $\left(4, -\frac{1}{8}\right)$ è un flesso ascendente.